



M É M O I R E S

DE

MATHÉMATIQUE

ET

DE PHYSIQUE,

TIRÉS DES REGISTRES

de l'Académie Royale des Sciences,

De l'Année M. DCCLX.

ESSAI D'UNE NOUVELLE ANALYSE

*De la mortalité causée par la petite Vérole, & des
avantages de l'Inoculation pour la prévenir.*

Par M. DANIEL BERNOULLI.

INTRODUCTION APOLOGÉTIQUE.*

CEUX qui ont senti tout l'avantage de l'Inoculation, ont
imaginé différentes façons de représenter cet avantage,
qui, quoique revenant au même, ne laissent pas de faire une

* Cette Introduction n'a été faite que long-temps après le Mémoire,
étant du 16. Avril 1765.

Mém. 1760.

A

impression fort inégale: qu'on suppose, par exemple, une génération de 13 mille enfans, il est sûr que si on pouvoit les affranchir de la petite vérole, on sauveroit par ce moyen la vie à environ mille de ces enfans. D'un autre côté, la même exemption ne feroit qu'ajouter environ deux ans à la vie moyenne de ces nouveaux nés. Voilà deux manières d'envisager le même objet, mais la première intéressera beaucoup plus de monde que la seconde, parce que dans la première on fait tomber l'avantage immédiatement & uniquement sur les sauvés, & que dans l'autre on distribue sur toute la génération le même avantage, qui, par l'évènement, devient inutile pour douze treizièmes de cette génération. Je ne suis donc point surpris que le vulgaire soit peu frappé de ce dernier aspect, mais je ne puis m'empêcher de l'être quand je vois des personnes de mérite & d'une grande réputation, demander sérieusement si c'est la peine de subir une opération telle que l'inoculation, dans l'espérance de prolonger la vie de deux ans: il seroit à souhaiter que les critiques fussent plus réservés & plus circonspects, & sur-tout qu'ils se donnassent la peine de se mettre au fait des choses qu'ils se proposent d'avance de critiquer.

En composant ce Mémoire, ce que j'ai fait à la prière de feu M. de Maupertuis, qui se trouvoit alors à Bâle & que je voyois très-souvent, je me suis attaché sur-tout, à exposer dans une même Table les deux états de l'humanité, l'un tel qu'il est effectivement, & l'autre tel qu'il seroit si on pouvoit affranchir de la petite vérole tout le genre humain. J'ai pensé que le parallèle de ces deux états en expliqueroit mieux la différence & le contraste, que ne feroit le plus ample commentaire, mais j'ai senti aussi la difficulté de l'entreprise; & la déféctuosité des listes mortuaires, qui ne marquent point l'âge de ceux que la petite vérole enlève; ne sauroit que mettre un grand obstacle à ces vues. Je voyois bien d'abord que l'exécution d'une telle idée demandè deux connoissances élémentaires: quel est le risque annuel à différens âges d'être surpris par la petite vérole, pour ceux qui ne l'ont pas eue, & quel est celui d'en mourir pour ceux qui en sont attaqués? Il est vrai que nous ne sommes

par immédiatement informés sur ces deux élémens, mais d'autres connoissances m'ont paru y suppléer avec beaucoup de vraisemblance; j'en parle cependant dans tout le cours de mon Mémoire avec les restrictions convenables: j'accorde même que ces deux risques pourroient bien n'être pas tout-à-fait les mêmes en différens pays. Voici quelques réflexions que j'ai faites là-dessus.

Quand nous voyons que la petite vérole n'attaque guère que les enfans & les jeunes gens, nous sommes d'abord portés à juger que la seule jeunesse y est exposée par sa constitution; aussi appelle-t-on cette maladie en ce pays*, *pustules d'enfans*: mais un peu plus de réflexion nous fait bien-tôt revenir de cette erreur. S'il est rare que la petite vérole attaque les adultés, c'est qu'il est rare que les adultes ne l'aient pas eue, & qu'elle n'attaque jamais, ou presque jamais, deux fois la même personne. C'est ici le caractère essentiel de cette maladie: ajoutez à ce caractère sa grande activité; elle est telle, que suivant mes hypothèses il y a autant à parier qu'on aura la petite vérole avant l'âge complet de 5 ans qu'après, & qu'on peut parier trois contre un de la prendre avant l'âge de 10 ans, quinze contre un avant l'âge de 20 ans, & plus de quatre mille contre un pour l'âge de 60 ans. Ces nombres m'ont toujours paru conformes à ce que les exemples nous apprennent dans les grandes villes. On sait combien il est rare de prendre la petite vérole après l'âge de 60 ans, & en même temps on sait que cela arrive quelquefois. Si l'on suppose à Paris 700 mille habitans, il y aura environ 60 mille personnes au-dessus de l'âge de 60 ans, & sur ce nombre il ne doit y avoir qu'environ quinze personnes qui n'aient pas eu la petite vérole, & deux personnes par an qui probablement la prennent (a). Or, on m'a cité tant d'exemples de gens des deux sexes qui sont attaqués de la petite vérole, à Paris, à un certain âge, qu'on doit m'accorder au moins le petit nombre de morts que ma théorie

* à Bâle en Suisse.

(a) On ne doit pas tenir compte ici de ces personnes rares, supposé qu'il y en ait, qui par leur constitution particulière, ne courent jamais le hazard de prendre la petite vérole, pas même par la voie de l'Inoculation.

indique pour cet âge. Il est donc vraisemblable que les vieillards qui n'ont point eu la petite vérole, courent le même risque de l'avoir que les jeunes gens. Pour peu que ce risque diminuât avec le grand âge, ce devroit être une chose sans exemple d'avoir la petite vérole à l'âge de 70 ans, & on-en connoît plusieurs. Je n'ai donc plus hésité d'adopter mon premier principe, qui est que tant qu'on n'a pas eu la petite vérole, on court continuellement le même risque de l'avoir. Nous n'avons encore aucune observation qui nous oblige à renoncer à cette supposition, & les loix de la Nature les plus simples sont toujours les plus vraisemblables.

C'est par les mêmes raisons que j'ai conçu que le risque de mourir de la petite vérole, quand on en est attaqué, pourroit bien être, année commune, le même à tout âge : cette hypothèse me paroît confirmée également par les notions que nous avons sur cette maladie & par les résultats de tous les calculs qui portent sur ce fondement. Enfin, tant que nous n'aurons pas de listes mortuaires pour la petite vérole, rangées suivant l'ordre de l'âge de ceux qui en sont morts, je me crois en droit de demeurer attaché à mes deux principes ; ils satisfont à tous les phénomènes connus, & on n'a point d'autre raison de dire que la gravitation universelle des corps célestes suit la raison réciproque des carrés des distances. Je prévois que nous aurons bien-tôt de Londres de pareilles listes ; alors je serai moi-même mon plus sévère critique. J'ai dit que les résultats de mes calculs sont tous très-vraisemblables : je citerai ici précisément celui qu'un grand Mathématicien a considéré comme le plus absurde, ou du moins le plus incroyable. J'ai trouvé (§. 9, note g.) que la seule petite vérole doit enlever pendant le cours de la neuvième année d'âge, les deux tiers du nombre total de toutes les autres maladies prises ensemble, ou les deux cinquièmes de la mortalité entière : la proportion n'est si grande ici que parce qu'à cet âge la mortalité entière est très-petite : la neuvième année est l'année presque la moins meurtrière de la vie. Pour peu qu'on examine la chose, toute autre proportion révoltera tous les esprits. J'ai donc cru devoir

faire sentir cette remarque dans une addition ajoutée à la note (g) : une nouvelle note (o) qui suit bien-tôt après, a été occasionnée par une question curieuse que le même Géomètre a mise sur le tapis. Il ne la traite qu'en tâtonnant. J'ai donc cru qu'il seroit à propos de la résoudre exactement suivant mes principes : on pourra voir si ma méthode soutient ce nouvel examen. Après tout, il me semble que du moins l'uniformité des deux risques en question ne sauroit souffrir la moindre difficulté depuis la première enfance jusqu'à l'âge de 24 ans, qui fait le terme de mes recherches, parce qu'à cet âge il ne reste presque plus rien à craindre de la petite vérole pour le total, du côté duquel j'ai tourné la plupart de mes réflexions : reste à se déterminer sur l'intensité de chacun des deux risques. Quant au risque annuel d'être attaqué par la petite vérole, pour ceux qui ne l'ont pas eue, j'ai cru ne pouvoir mieux satisfaire aux notions générales que nous avons sur cette maladie, qu'en le supposant d'un huitième, c'est-à-dire que dans le cours d'une année commune mille personnes seront surprises par la petite vérole, lorsqu'il y en a huit mille qui ne l'ont pas eue : ce rapport de 1 sur 8 étant supposé constant, malgré la diminution relative à leur âge croissant, du nombre de ceux qui n'ont pas eu la petite vérole, les Géomètres verront qu'en ce sens j'en ai fait une juste application dans mon analyse au §. 5 ; ce que je dis pour répondre à la remarque qu'un autre grand Géomètre, dont j'ai toujours respecté la droiture d'esprit & de cœur, m'a fait parvenir, & qui dans un autre sens auroit été très-fondée : la difficulté rouloit sur de petites variations qui arrivent dans le cours même de chaque année, auxquelles on ne sauroit avoir égard avec toute la précision géométrique, parce que nous n'avons des listes mortuaires que d'année en année ; tout ce qu'on peut faire, est d'établir de certains nombres tels qu'ils sont au milieu de chaque année d'âge, & c'est ce que j'ai fait toutes les fois que je l'ai cru nécessaire. Au reste le différend n'est d'aucune conséquence sensible, sur-tout dans cette matière, qui est si exposée aux inégalités du hasard. Je reviens à mon sujet principal : je dis donc que pour peu qu'on

voulût changer ledit rapport de 1 sur 8, l'effet qui en rejail-
liroit sur les adultes & sur les vieillards seroit trop sensible,
& peut-être manifestement faux.

Je ne dis pas pour cela que ce rapport soit exactement vrai,
mais il ne sauroit manquer de l'être à peu près. Disons encore
un mot sur le risque de mourir de la petite vérole pour ceux qui en
sont attaqués : la plupart l'ont fait d'un septième ; je l'ai un peu
diminué, en le faisant d'un huitième : deux raisons m'y ont
engagé, la première est qu'on apprend exactement tous ceux qui
en meurent, & qu'on ne sauroit apprendre si exactement tous
ceux qui ont la maladie ; la seconde, est que le rapport
de 1 sur 7 seroit la mortalité variolique trop grande par
rapport à la mortalité entière, pendant que celui de 1 sur
8 est entièrement conforme à l'observation la mieux constatée,
qui est que la petite vérole enlève la treizième partie
du total des morts. Ce n'est qu'après un tel examen de mes
principes que j'ai pris la peine de composer ce Mémoire, où
chaque nouveau pas, m'a paru rendre ces principes plus re-
commandables : il n'y a que la première année d'âge qui m'a
semblé d'abord un peu surchargée dans la distribution de tout
le ravage variolique (§. 8). Une plus ample information m'a
appris qu'il y avoit peut-être plus de franchise dans ma remarque
que de réalité ; en tout cas je vois que la cause pourroit être
plutôt morale que physique ; le peu de communication des
nouveaux nés avec le reste de la société, n'en pourroit-il pas
préservir quelques-uns de l'attaque de la petite vérole pendant
quelques mois ? voilà toute ma justification sur cet article qu'on
m'a reproché. J'ajouterai encore que je n'avois aucun intérêt
dans l'établissement & le choix de mes principes, puisque mes
formules sont généralement intégrables ; je n'ai jamais eu d'autres
intentions là-dessus que d'écouter la voix de la Nature. N'étouffons
donc pas les semences d'une analyse, qui moyennant de bonnes
listes pathologiques, mortuaires, baptistaires, matrimoniales,
&c. peut devenir applicable à plusieurs questions intéressantes,
tant physiques que morales & politiques, concernant les différens
états & ordres qui partagent l'humanité.

§. 1. IL est constaté par une longue suite d'observations, que la petite vérole emporte la treizième ou la quatorzième partie de chaque génération; j'ai vu des listes qui marquent la quatorzième partie; j'en ai vu d'autres de Bréslaw qui vont jusqu'à la trezième partie: quelques-unes vont encore un peu au-delà. On fait encore que cette maladie enlève environ la huitième ou la septième partie de ceux qu'elle attaque, pourvu qu'on prenne la proportion sur un grand nombre d'épidémies. Ces épidémies sont si différentes, que les unes enlèvent au-delà du tiers des attaqués, pendant que d'autres n'imposent ce tribut fatal qu'à un sur 20, 30, 40 ou même davantage: de-là il me paroît tout naturel de dire que la mortalité de la petite vérole dépend moins de la constitution de ceux qu'elle surprend, que de la nature plus ou moins maligne de la cause qui la produit & qui est commune à toute une étendue de pays. Il est à présumer que la petite vérole seroit très-rarement mortelle si la cause épidémique ne-la rendoit pas telle: cette simple réflexion forme déjà un préjugé bien favorable pour l'Inoculation, puisque pour la faire, on est le maître de choisir le temps d'une épidémie très-bénigne; & à mon avis l'épidémie la plus bénigne, est celle qui ne manifeste aucune activité. Je considère comme telle tout l'intervalle entre deux épidémies manifestes; a-t-on remarqué d'un côté que plus la petite vérole naturelle se répand, plus elle est dangereuse, & de l'autre, que l'Inoculation faite pendant le plus fort d'une épidémie, n'est plus, à beaucoup près, si sûre que celle qu'on fait hors de toute épidémie. Je ne nie pas pour cela qu'une petite partie du danger de la petite vérole ne puisse trouver son origine dans une certaine disposition du malade, mais il faut bien que par l'Inoculation on prévienne encore ce reste de danger; pourvu qu'on prenne toutes les mesures qu'une longue expérience a dictées, puisqu'avec ces mesures tous les inoculés en réchappent, ou du moins presque tous. C'est un phénomène que je n'entreprends point d'expliquer, mais dont il est triste pour le bien de l'humanité que la vérité soit encore contestée. Mon dessein n'est dans ce Mémoire que de faire une comparaison entre l'état

Commencé
de lire le 30
Avril 1760.

8 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

de l'humanité tel qu'il est sans l'inoculation, & celui qui seroit si cette salutaire opération étoit ou généralement admise ou simplement suivie avec de certaines maximes. Il est vrai que nous manquons encore de notions suffisantes pour répondre exactement à cette question, mais il m'a paru que nous en avions assez pour pouvoir répandre quelque nouvelle lumière sur une matière dont on commence à voir la grande importance.

§. 2. J'ai dit d'abord que la petite vérole naturelle enlève la huitième ou la septième partie de ceux qui en sont malades. En Angleterre, on adopte assez communément la dernière proportion : dans d'autres pays il ne paroît pas que la mortalité de cette maladie soit si grande : actuellement elle est ici, à Bâle, épidémique depuis environ neuf mois, & les Médecins disent qu'elle est fort répandue & assez maligne. Cependant, si je dois m'en rapporter au témoignage d'un de nos Médecins les plus accrédités, il en est mort à peine 1 sur 20 : je remarque d'ailleurs que de quelque méthode qu'on se serve pour déterminer la proportion moyenne, on pourra toujours alléguer des raisons très-fondées, qui diminuent un peu la mortalité sur le nombre total de ceux qui en sont attaqués. Quant à la proportion qu'il y a de la mortalité de la petite vérole à la mortalité entière du genre humain, on la suppose communément en Angleterre comme 1 à 14 : il y a là-dessus des listes rapportées par M. Susmilch, qui marquent qu'à Londres il est mort de la petite vérole 19745 sur 260875, ce qui donne la proportion de 1 à $13\frac{1}{5}$: à Vienne, cette maladie a enlevé 1083 sur 13521, c'est 1 sur $12\frac{1}{2}$: à Berlin, 586 sur 6771, c'est 1 sur $11\frac{1}{2}$: à Breslaw, 431 sur 4578, c'est 1 sur $10\frac{1}{2}$, mais ces dernières proportions n'ont été prises que pour deux & trois ans, pendant lesquels il peut y avoir eu une épidémie un peu forte. Outre ces notions spécifiées, nous en avons plusieurs autres, mais plus vagues & moins déterminées. Si on savoit exactement toutes les proportions moyennes qu'on auroit pu déterminer sur un très-grand nombre d'observations, mais bien considérées & réfléchies, on pourroit donner une théorie complète sur les hasards de
la

la petite vérole: une telle théorie dicteroit les maximes que tout homme raisonnable doit suivre. Voici deux articles qu'on ne connoît encore que fort superficiellement & qu'il seroit important de connoître avec une grande précision.

§. 3. Le premier article est le risque que l'on court tous les ans de prendre la petite vérole tant qu'on ne l'a pas eue; le second, le risque d'en mourir pour les différens âges lorsqu'on la prend. Moyennant la connoissance de ces deux articles, on seroit en état de faire un parallèle assez exact entre les deux états de l'humanité ci-dessus mentionnés, l'un naturel & l'autre exempt de la destruction de la petite vérole: le second de ces deux articles seroit bien facile à déterminer, si les Médecins vouloient tenir un registre de leurs malades de la petite vérole, où ils marqueroient l'âge de chaque malade & ceux qui en seroient morts. D'un grand nombre de pareils registres, dont on communiqueroit les résultats au Doyen de la Faculté, on déduiroit assez exactement le danger que l'on court de mourir à chaque âge auquel on prendroit la petite vérole: un habile homme en tireroit plusieurs autres conséquences utiles, même à l'égard de notre premier article, qu'il n'est pas si facile de déterminer. Dans cette incertitude, il ne reste qu'un moyen, c'est de former sur les deux dits articles les hypothèses les plus vraisemblables: voici celles que j'ai choisies.

(1) Je supposerai qu'indépendamment de l'âge dans un grand nombre de personnes qui n'ont pas encore eu la petite vérole, cette maladie attaque chaque année une personne sur autant de personnes qu'il y a d'unités dans n . Suivant cette hypothèse, le danger de prendre la maladie resteroit le même pour chaque année de vie, tant qu'on ne l'auroit pas eue: si, par exemple, on faisoit $n = 10$, le sort de chaque personne seroit d'être décimée chaque année de sa vie, pour savoir si elle aura cette même année la petite vérole ou non, jusqu'à ce que le sort fût tombé une fois sur elle. Cette hypothèse me paroît fort vraisemblable pour tous les jeunes gens jusqu'à l'âge de seize à vingt ans. Si nous voyons peu de personnes au-dessus de cet âge qui prennent la petite vérole, c'est que le plus grand nombre

10 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
en aura déjà été atteint: la suite nous fera voir quel degré de
vraisemblance cette hypothèse mérite.

(2) Je supposerai en second lieu, que dans quelque âge qu'on
prenne la petite vérole, le danger d'en mourir est toujours le
même, & que sur un nombre de malades, exprimé par m ,
il en meurt un: je remarque à l'égard de cette supposition,
qu'aucun Médecin ne s'est encore avisé de supposer la petite
vérole, tout le reste étant égal, plus ou moins dangereuse par
le seul âge auquel on la prend, pourvu que cet âge n'excède
pas les vingt ans: ce n'est qu'au-dessus de cet âge qu'on sup-
pose ordinairement la petite vérole commencer à devenir un
peu plus dangereuse. Nous aurons occasion ci-dessous d'examiner
cette hypothèse de plus près.

§. 4. Comme notre intention est sur-tout de démêler dans
la mortalité entière, celle de la petite vérole pour tous les âges,
ou du moins jusqu'à l'âge de vingt ans, il faut connaître avant
toutes choses la mortalité entière, mais moyenne: nous ne
manquons pas de listes mortuaires faites en différens pais,
dans lesquelles il est marqué combien sur un certain nombre
de personnes il en meurt à chaque année d'âge jusqu'à la mort
du dernier: on regarde ensuite ce grand nombre de personnes
comme nées en même temps. Ces listes ont ordinairement
des inégalités manifestes, à moins qu'on ne choisisse les nombres
sur un très-grand nombre de listes annuelles; elles forment
comme un chemin raboteux qu'il faut aplanir & unir: on
ajoute aux uns & on retranche aux autres, jusqu'à ce
qu'on obtienne une uniformité de loi dans les variations. M.
Susmilch cite une telle Table construite par M. Halley, dans
laquelle on ne voit aucune variation brusquée & difforme. La
Table que j'exposerai ci-dessous commence par mille enfans
tous âgés d'un an accompli, mais M. Halley ne marque pas
quel est le nombre des enfans nouveaux nés que la Table
suppose & dont il reste mille vivans au bout d'un an: M.
Susmilch le suppose de 1238, en disant que c'étoit là le nombre
annuel moyen des enfans nés à Breslaw; mais toutes les autres
listes nous indiquent que la mortalité de la première année est

plus grande que de 238 sur 1238 : voyez, par exemple, la Table insérée au Tome second de l'excellente Histoire Naturelle de M. de Buffon, page 590. vous y trouverez 6454 morts avant la fin de leur première année, sur 23994 enfans nouveaux nés; & suivant cette proportion, il faudroit commencer la Table de M. Halley par 1368 au lieu de 1238. Il paroît que M. Halley a voulu partir d'un nombre rond, en observant simplement la proportionnalité pour chaque âge. Je choisirai un milieu entre 1368 & 1238, & je supposerai que sur 1300 enfans nouveaux nés il y en a 1000 qui arrivent à l'âge d'un an accompli, après quoi j'adopterai la Table de M. Halley telle qu'elle est.

§. 5. Soit à présent l'âge exprimé par années $= x$, le nombre des survivans à cet âge $= \xi$, le nombre de ceux qui n'ont pas eu la petite vérole à cet âge $= s$, & qu'on retienne la signification donnée ci-dessus (§. 3.) aux lettres n & m , voici là-dessus le raisonnement qu'on peut faire pour exprimer généralement la valeur de s , ce qui doit faire l'objet principal de ces recherches. Je dis donc que l'élément ds est d'abord égal au nombre de ceux qui prennent la petite vérole pendant le temps dx , & ce nombre devient, par nos hypothèses $= \frac{s dx}{n}$, puisque si dans le temps d'une année sur n personnes, une prend la petite vérole, il s'ensuit que dans le temps dx sur s personnes, il y aura $\frac{s dx}{n}$ qui prendront cette maladie. Dans ce nombre $\frac{s dx}{n}$, sont compris ceux qui en meurent, mais il faudra y ajouter encore ceux que les autres maladies emportent dans le même temps dx & sur le même nombre s ; le nombre de ceux qui meurent de la petite vérole pendant le temps dx , est $= \frac{s dx}{m n}$, & par conséquent le nombre total de ceux qui meurent par d'autres maladies, $= d\xi - \frac{s dx}{m n}$; mais ce dernier nombre doit être

diminué en raison de ξ à s , puisqu'il ne s'agit que de la diminution de ceux qui n'ont pas encore eu la petite vérole, dont le nombre est s . Nous aurons donc cette équation

$$-ds = \frac{sdx}{n} - \frac{s d\xi}{\xi} - \frac{ssdx}{mn\xi}$$

Dans cette équation, les élémens ds & $d\xi$ sont négatifs par eux-mêmes, puisque les nombres s & ξ diminuent, c'est pourquoi il faut y mettre le signe négatif; mais le signe du dernier terme est devenu négatif par une soustraction réelle qu'il falloit faire. On voit aussi que j'entends proprement par

$\frac{1}{n}$ & $\frac{1}{m}$ l'intensité des périls à prendre la petite vérole

pour ceux qui ne l'ont pas encore eue, & à en mourir lorsqu'on en est attaqué, en supposant ceux qui l'ont eue une fois hors de péril de la reprendre. S'il y a des exemples qu'on ait pris la maladie en deux différentes fois, ils sont si rares qu'ils ne méritent pas qu'on en parle: il est fort remarquable que notre équation différentielle admette une intégration, quoique les indéterminées soient mêlées, & qu'il y ait trois indéterminées, ce qui est fort rare pour des questions qui éclaircissent l'état de la Nature & qui diffèrent si fort des questions abstraites. Voici les passages qui conduisent à l'intégration: qu'on mette

$\frac{s d\xi}{\xi} - ds = \frac{sdx}{n} - \frac{ssdx}{mn\xi}$; cette équation multi-

pliée par $\frac{\xi}{s}$, donne $\frac{s d\xi - \xi ds}{s^2} = \frac{\xi dx}{ns} - \frac{dx}{mn}$, &

si on suppose $\frac{\xi}{s} = q$, on aura $dq = \frac{q dx}{n} - \frac{dx}{mn}$,

ou bien $mn dq = m q dx - dx$, ce qui fait $\frac{mndq}{mq-1} = dx$,

dont l'intégrale est $n \log. (mq - 1) = x + C$, en entendant

par C la constante requise; & si on remet $\frac{\xi}{s}$ à la place de q ,

on aura $n \log. \left(\frac{m\xi}{s} - 1 \right) = x + C$. Si on nomme e

le nombre qui a l'unité pour son logarithme hyperbolique,

& qui est 2,718, on aura, en prenant les nombres de la dernière équation, $(\frac{m\xi}{s} - 1)^n = e^{x+C}$, d'où l'on tire enfin $s = \frac{m}{e^{\frac{x+C}{n}} + 1} \xi$.

§. 6. Voilà donc la valeur de s déterminée par des quantités que je traite toutes comme connues; mais avant que de faire l'application de cette équation, je ferai quelques réflexions sur la constante C , de même que sur le choix de nos positions m & n : quant à la constante C , la manière la plus naturelle de la déterminer, est celle de dire qu'au commencement de chaque génération, lorsque x est $= 0$, on doit avoir $s = \xi$, l'une & l'autre lettre exprimant alors le nombre des enfans nouveaux nés dont il est question: cette considération donne

$$e^{\frac{C}{n}} = m - 1, \text{ \& par conséquent}$$

$$s = \frac{m}{(m-1)e^{\frac{x}{n}} + 1} \xi.$$

Je me tiendrai à cette équation, quoiqu'il soit très-possible, même suivant la plupart des Médecins, que plusieurs enfans aient eu la petite vérole avant de naître: si on vouloit avoir égard à cette considération, il faudroit un peu changer la constante, & notre théorie ne s'en trouveroit que mieux, ce que j'ai voulu faire remarquer d'avance. De tels enfans seroient à considérer comme nés avec la disposition de ne jamais prendre la petite vérole, & il y a apparence que ceux qui se sont soumis à l'Inoculation sans gagner la maladie, doivent être placés, pour la plupart, dans cette classe.

Quant aux valeurs des nombres n & m , je me suis contenté de les supposer constamment les mêmes, du moins jusqu'à l'âge d'environ vingt ans; mais nous sommes encore libres sur le choix de ces valeurs absolues, c'est pourquoi il faut tâcher de les choisir telles, qu'elles soient les plus convenables aux notions que nous avons sur la nature de la petite vérole, relativement à chaque climat. On voit facilement que plus on

augmente le nombre n , moins on charge l'enfance & la jeunesse, & réciproquement. Si on prenoit pour n un nombre extrêmement grand, presque tout le monde mourroit avant que de prendre la petite vérole, puisqu'en supposant n infiniment grand, on trouve $s = \xi$; & si au contraire on supposoit n être un nombre très-petit, tous les enfans, ou presque tous, en seroient atteints dès leur premier âge. Il semble qu'à Paris il y ait plus de personnes avancées en âge sujettes à cette maladie qu'il n'y en a à Bâle, où la petite vérole, depuis huit à neuf mois, a attaqué plus de 600 personnes, dont la plus âgée que j'aie entendu nommer, n'avoit pas 23 ans accomplis. Si cette conjecture étoit fondée, il faudroit prendre le nombre n plus grand pour Paris que pour Bâle. Après quelques réflexions, je me suis déterminé à calculer pour tous les âges le nombre de ceux qui probablement n'auroient pas encore eu la petite vérole, en supposant $n = 8$. Enfin, je suppose-
rai de même $m = 8$, c'est-à-dire que la petite vérole enlève 1 sur 8 qu'elle attaque. Ces suppositions nous donnent enfin cette équation, $s = \frac{8}{7e^{\frac{x}{8}} + 1} \xi$.

§. 7. Cette dernière équation, qui n'est plus que numérique, nous met en état de déterminer la valeur de s pour chaque âge, c'est ce qui m'a engagé à construire la Table qui est à la fin de ce Mémoire, dont voici l'explication.

La première colonne marque tous les âges par des années accomplies, que j'ai dénotés par x , & elle commence par 0, qui répond au jour de la naissance.

La seconde colonne indique le nombre de ceux qui restent en vie à chaque âge sur le nombre de 1300, que je considère tous comme nés au même jour; cette colonne est formée sur la Table de M. Halley. Tous ces nombres sont indiqués par la variable ξ .

La troisième colonne est formée sur l'équation finale du précédent article; ainsi elle donne pour chaque âge, suivant nos hypothèses, le nombre de ceux qui n'ont pas encore eu la petite vérole.

La quatrième colonne donne au contraire le nombre de ceux qui ont déjà eu la petite vérole; qui en sont réchappés & qui ne sont morts par aucune autre maladie: ils sont exprimés par $\xi - s$.

La cinquième colonne marque le nombre de ceux qui probablement auront pris la petite vérole pendant l'année précédente; c'est suivant mon hypothèse, la huitième partie de tous ceux qui ne l'ont pas encore eue, ou $\frac{1}{8} s$; mais pour plus grande exactitude, je prendrai ici pour s , non la valeur que nous avons trouvée pour le commencement de chaque année, mais pour le milieu de l'année précédente, c'est-à-dire que je prendrai le milieu arithmétique entre les deux nombres de la troisième colonne qui se suivent. Ainsi le premier nombre de cette cinquième colonne marque combien d'enfans nouveaux nés auront pris la petite vérole pendant la première année de leur âge.

La sixième colonne marque le nombre de ceux qui meurent de la petite vérole pendant l'année que nous avons décrite; ainsi, suivant notre hypothèse, tous ces nombres sont la huitième partie des nombres analogues de la cinquième colonne.

La septième colonne exprime la somme de tous ceux qui sont morts de la petite vérole depuis la naissance jusqu'à chaque année d'âge accomplie.

La huitième colonne indique le nombre de ceux que toutes les autres maladies, hors de la petite vérole, enlèvent pendant chaque année courante; ainsi chaque nombre de cette colonne est la différence entre tous les morts de l'année passée, que l'on connoît par la seconde colonne, & ceux qui sont morts de la petite vérole pendant la même année passée.

Lorsque les nombres sont trop petits pour négliger les fractions, j'ajouterai à ces nombres une figure décimale: au reste, je n'étendrai pas cette Table au-delà de vingt-quatre ans, l'effet de la petite vérole ne pouvant plus être considérable au-delà de cet âge, relativement à toute l'humanité: d'ailleurs les principes que nous avons employés n'en auront que plus de certitude. Je me contenterai donc d'indiquer en général le petit reste

de mortalité que la petite vérole pourra encore vraisemblablement causer.

§. 8. La précédente Table, quoique parfaitement conforme à nos hypothèses, ne sera pas à la vérité exactement conforme à la Nature: je suis cependant persuadé qu'elle ne s'en écarte pas beaucoup, tant à cause de la vraisemblance de nos hypothèses, que parce qu'aucun nombre ne me paroît choquer ces notions générales, que des observations infinies nous ont dictées sur la petite vérole. Il n'y a peut-être que le premier nombre de la cinquième colonne qui marque combien d'enfans sur 1300 prendront la petite vérole pendant leur première année de vie, qui paroîtra un peu trop grand. La Table donne 137 pour ce nombre, & par conséquent 17 pour le nombre de ceux qui en mourront: on pourra cependant se servir de notre Table telle qu'elle est, sans un grand nombre de nouvelles observations sur la petite vérole, je ne conseillerois pas d'y rien changer*. Voici donc quelques remarques.

§. 9. (a) A l'âge de six ans accomplis, ou très-peu après, le nombre des survivans sera partagé en deux classes égales; une moitié aura eu la petite vérole & l'autre ne l'aura pas eue: à l'âge de quinze ans, il n'y aura plus qu'environ la sixième partie des vivans qui n'aura pas eu la petite vérole, ou environ la douzième partie de la génération entière: il y a donc à parier 11 contre 1 pour chaque nouveau né, qu'il prendra la petite vérole avant l'âge de quinze ans accomplis, ou qu'il mourra avant cet âge: enfin à l'âge de vingt-quatre ans, il n'y aura plus que 32 personnes qui soient échappées jusque-là à cette maladie: c'est là dix-huitième partie de tous ceux qui atteignent à cet âge, & la quarantième partie de tous les nouveaux nés. Il y a donc 39 à parier contre 1, pour chaque nouveau né, que l'enfant mourra ou prendra la petite vérole avant vingt-quatre ans.

(b) Si on vouloit étendre nos principes & nos hypothèses au-delà de vingt-quatre ans, on pourroit supposer que le nombre de ceux qui n'ont pas eu la petite vérole, diminue de la moitié à chaque 5 ans, même en les supposant affranchis de toute

* Voyez là-dessus mon Introduction apologétique, vers la fin.

autre maladie qui pût les enlever: il y aura donc tout au plus seize à l'âge de vingt-neuf ans, huit à l'âge de trente-quatre ans, quatre à l'âge de trente-neuf ans, deux à l'âge de quarante-quatre ans, & enfin un à l'âge de quarante-neuf ans; qui n'aient pas eu la petite vérole; & comme on ne voit dans tout cela encore rien de manifestement faux, c'est un nouveau préjugé en faveur de nos hypothèses.

(c) Sur les 32 personnes qui à l'âge de vingt-quatre ans n'auront pas encore eu la petite vérole, il y en aura tout au plus 3 qui mourront de cette maladie, parce qu'il y en aura au moins 8 qui mourront avant d'en être atteints. Si nous ajoutons ces 3 à la somme de 98 morts de la petite vérole avant l'âge de vingt-quatre ans, nous aurons en tout 101 personnes mortes de cette maladie, ce qui fait à peu-près la treizième partie de la génération entière, & ce qui est entièrement conforme à la plus grande partie des listes mortuaires qui indiquent le nombre de ceux qui sont morts de la petite vérole. Cet accord me paroît d'autant plus digne d'attention, qu'il découle de notre théorie, sans que nous ayons jamais tenu compte de la proportion entre le nombre de ceux qui meurent de la petite vérole & le nombre total des morts de toutes maladies: cette proportion n'est donc qu'un phénomène que notre théorie explique avec la dernière précision.

(d) La septième colonne de notre Table nous fait encore voir que de tous ceux qui meurent de la petite vérole, la moitié en sera morte avant l'âge de 5 ans.

(e) La huitième colonne marque que depuis l'âge de douze à treize ans, toutes les maladies & accidens, en exceptant la seule petite vérole, n'enlèvent dans l'année que 3,7 sur 646 personnes qui vivoient au commencement de l'année, ce qui fait un seul sur 173 personnes. De-là il suit que sans la petite vérole, l'année la plus sûre est celle de douze à treize ans; il y a 172 à parier contre 1 qu'une personne qui a déjà eu la petite vérole ne mourra pas cette année.

(f) C'est encore la huitième colonne qui doit régler les rentes viagères qu'on accorde aux différens âges dans les tontines, puisqu'il est comme prouvé qu'on ne place guère l'argent

sur la tête d'un enfant qui n'a pas encore eu la petite vérole; cependant ceux qui évaluent les rentes à accorder aux différens âges, au lieu de se fonder simplement sur la huitième colonne, n'ont coutume que de considérer les différences de la seconde colonne, ou bien la somme des nombres correspondans de la sixième & de la huitième colonne.

(g) En vertu de la remarque (c), la mortalité entière de la petite vérole fait la treizième partie de la somme de toutes les mortalités entières, ou la douzième partie de toutes les mortalités, excepté celle de la petite vérole; mais si on ne considère les mortalités que successivement pour chaque année d'âge, le rapport entre la mortalité de la petite vérole & celle de toutes les autres maladies, change extrêmement à chaque année. Pendant la première année d'âge, ce rapport devient, en vertu de la sixième & de la huitième colonne, comme 17 à 283, ou environ comme 1 à 17: ensuite ce rapport augmente considérablement, & puis diminue jusqu'à devenir enfin insensible. Ce rapport devient donc quelque part le plus grand, & les deux dites colonnes nous apprennent que c'est vis-à-vis de l'âge indiqué par 9: à cet âge la mortalité de la petite vérole, pendant le cours de toute l'année précédente, est exprimée par 4, & la somme de toutes les autres mortalités par 6; d'où il résulte la proportion de 4 à 6 ou de 2 à 3. De-là nous voyons que pendant le cours de la neuvième année la seule petite vérole emporte les deux tiers de ce que toutes les autres maladies peuvent faire, ou les deux cinquièmes de ce qu'emportent toutes les maladies ensemble. Voici un point de vue d'où la petite vérole se montre sous une face terrible; mais cette effrayante proportion ne dure pas long-temps, elle diminue ensuite continuellement: pendant le cours de la vingt-quatrième année, la petite vérole n'enlève plus que la quinzième partie du total, & bien-tôt après sa faux est presque entièrement émouffée*.

* [Dans une critique de ce Mémoire, qu'on a fait imprimer long-temps avant que le Mémoire l'ait été, on cite cette remarque, ou plutôt cette conséquence, comme donnant le plus d'atteinte à ma théorie;

(h) La remarque précédente donne encore occasion de rechercher l'âge qui répond à la proportion moyenne entre toutes les proportions indiquées : cette proportion moyenne entre les morts de la petite vérole & ceux de toutes les autres maladies, est, tant en vertu de la plupart des listes mortuaires qu'en vertu de notre Table, comme 1 à 12, & par conséquent il faut que la petite vérole enlève 100 sur 1300 : là-dessus on peut demander quel est l'âge auquel, si tous les enfans prenoient la petite vérole, il en mourroit pareillement cent? notre Table indique que c'est à peu-près à l'âge de 4 ans, car à cet âge il y a 760 de survivans, mais ce nombre doit être augmenté de ceux que la petite vérole a enlevés pendant les quatre premières années, & desquels la plupart vivroient encore sans la destruction précédente de cette maladie. Or il en est mort 47; & si sur ce nombre on prend 40, & qu'on les ajoute à 760, on aura 800 : il y auroit donc sur la naissance de 1300 enfans 800 qui parviendroient à l'âge de 4 ans accomplis; & alors si tous ces enfans prenoient la petite vérole, il en mourroit la huitième partie, ce qui feroit encore 100, ou la treizième partie de la naissance entière.

(i) On fait souvent mention du nombre de ceux qui meurent sans avoir jamais eu la petite vérole. Les élémens que nous

on trouve ma proportion de 2 à 3 excessive. A-t-on bien réfléchi sur ce reproche! voici le fait. La liste mortuaire de M. Halley marque que sur une génération de 1300 enfans, il en meurt 10 en tout dans le cours de la neuvième année d'âge : je n'ai donc aucune part à ce nombre, qui est de fait. Reste l'autre nombre à examiner : j'ai dit que la neuvième année d'âge enlève sur cette même génération de 1300 enfans 4 par la seule petite vérole, c'est la vingt-cinquième partie du total, constaté par une infinité d'observations, & exactement confirmé par mes calculs : c'est donc cette vingt-cinquième partie que l'on trouve excessive; après qu'on a dit

immédiatement auparavant; *Il y a lieu de croire que $\frac{1}{n}$ est d'abord assez petit, & qu'il augmente ensuite pour recommencer à diminuer après l'âge de 10 ans, c'est-à-dire, qu'il y a lieu de croire que l'âge de 8 à 9 ans est plus exposé que tout autre au risque d'être attaqué par la petite vérole.* Je souhaiterois que l'auteur de cette critique prit la peine de faire à son gré une distribution des 100 ou 101 personnes; qu'on fait positivement que la petite vérole enlève communément sur une génération de 1300 enfans; il verroit s'il est possible de concilier sa critique avec ce qu'il dit, *qu'il y a lieu de croire*.

20 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
avons choisis pour former notre Table, font ce nombre égal à 500; car si 100 personnes meurent en tout de la maladie en question, il faut que 800 aient eu effectivement la petite vérole, & que les 500 qui restent meurent sans la prendre: au lieu de 500, il faudroit mettre 650 si on vouloit supposer que la petite vérole n'enlève que la quatorzième partie de chaque naissance annuelle, & la septième partie de tous ceux que cette maladie attaque.

(l) On peut dire qu'il meurt en tout de la petite vérole fort à peu - près 100 sur 1300, dont 1200 meurent par d'autres maladies; que de ces 1200 il y en aura 700 qui auront eu la petite vérole & qui en seront réchappés, & que 500 mourront sans avoir jamais eu la petite vérole: cela se confirme encore par notre Table; car à l'âge de vingt-quatre ans accomplis, la huitième colonne marque en tout 631 personnes mortes par d'autres maladies, & la seconde colonne donne 572 survivans à cet âge, desquels il en mourra environ 3 de la petite vérole; de sorte que 569 mourront tous de quelque autre maladie, & qu'il y aura en tout 1200 personnes qui mourront autrement que par la petite vérole.

(m) Dans une succession uniforme & continuelle de générations annuelles, le nombre de tous ceux qui sont attaqués de la petite vérole pendant chaque année, est de 800 sur 1300, ou de $\frac{8}{13}$ de la naissance annuelle. Si on suppose la naissance annuelle à Paris de 18 mille enfans, il faut qu'il y ait chaque année plus de 11 mille malades de la petite vérole, ou environ 900 par mois; & si on vouloit donner le temps d'un mois à la durée de la maladie, il y auroit, sans interruption, 900 malades de la petite vérole à Paris, à considérer la chose dans son état moyen. Quel soulagement aux Médecins si on pouvoit les délivrer de cette terrible tâche!

(n) On sait ce qu'on appelle *vie moyenne*; on la trouve en prenant sur un grand nombre de personnes la somme des vies de chacune, depuis sa naissance jusqu'à sa mort, & en divisant cette somme par le nombre des personnes: cette vie moyenne pour les enfans nouveaux nés, est d'environ $26\frac{1}{2}$, suivant

la liste mortuaire de M. Halley : mais quelle seroit la vie moyenne d'un grand nombre de nouveaux nés qu'on fauroit avoir à mourir de la petite vérole ? c'est-là une question qui éclaircit encore la nature de la petite vérole : la septième colonne nous met en état de résoudre ce problème ; il faudra prendre le complément de chaque nombre de cette colonne à 101, qui fait le nombre de tous ceux qui meurent de la petite vérole : de cette façon on aura pour chaque année le nombre de ceux que la petite vérole n'a pas encore enlevés, & qu'elle se réserve d'enlever à son temps ; ensuite il faut, suivant la règle ordinaire, prendre la somme de tous ces complémens & la diviser par 101 ; mais comme notre Table ne s'étend que jusqu'à l'âge de vingt-quatre ans accomplis, il y faut une petite correction. Remarquons donc qu'après cet âge la petite vérole n'enlèvera plus que 3, dont chacun auroit pu vivre encore environ 6 ans, en prenant le milieu de tous les trois : de sorte qu'il faudra ajouter à la somme de tous lesdits complémens environ 3×6 , ou 18. En suivant cette méthode, on trouve la vie moyenne de tous ceux que la petite vérole doit enlever, de 6 ans 1 mois : à cet âge la maladie aura déjà été fatale à 61 sur 101 ; mais les autres 40 qui ont encore le même sort devant eux, peuvent se promettre encore autant de vie qu'en ont eu les 61 déjà morts, puisqu'il y en a, par exemple, 3 qui vivront encore à l'âge de vingt-quatre ans, & qui eux-mêmes peuvent encore se promettre environ 6 ans.

(o) [Ce Mémoire ayant donné occasion à un célèbre Académicien de former cette autre question ; *De toutes les personnes actuellement vivantes, combien y en a-t-il qui n'ont pas eu la petite vérole ?* ses raisonnemens l'ont conduit à cette conclusion, que ce nombre est tout au plus le quart du total des vivans. Voici la solution de cette question, tirée de mes principes.

Soit N le nombre total des vivans, a le nombre de ceux qui meurent par an, x le nombre cherché de ceux qui n'ont pas eu la petite vérole, on aura $\frac{1}{13} a = \frac{x}{64}$ & $x = \frac{64}{13} a$

Si on fait $\frac{N}{a} = g$, on aura $x = \frac{64}{13} \times \frac{N}{g}$; & si on suppose $g = 32$, ce sera $\frac{2}{13} N$ & environ 107 mille pour Paris, en supposant le nombre de ses habitans 700 mille.

Je souhaiterois, car je ne cherche que la vérité, que quelques Curés de village voulussent bien se donner la peine de faire de pareils dénombremens, mais il faudroit exclure les villages où l'on a coutume d'envoyer des enfans en nourrice, & n'employer que des Curés prudens & entendus, qui fussent bien articuler leurs questions & réduire à leur juste valeur les réponses. Voici un autre théorème qui pourroit servir à la vérification de nos principes. Si de tous les vivans on ne prend que l'enfance & la jeunesse, jusqu'à l'âge de seize ans & demi, on trouvera le nombre de ceux qui auront eu la petite vérole à peu-près égal au nombre de ceux qui ne l'auront pas eue. Je crois que le dénombrement fait sur ce résultat seroit moins sujet à des réponses équivoques, & il seroit beaucoup plus facile dans l'exécution.]

§. 10. On pourroit tirer un grand nombre d'autres corollaires de notre théorie; je les passe sous silence pour n'être pas trop long. Si cependant quelques-uns de nos corollaires ne paroissent pas assez conformes à l'expérience, il n'en faudroit pas pour cela rejeter nos calculs, car en changeant un peu les élémens dont je me suis servi; on pourra peut-être satisfaire plus exactement aux phénomènes. Il semble même que chaque pays demande quelque petit changement dans les élémens: il paroît, par exemple, qu'en ce pays (à Bâle) il est plus rare qu'à Paris de parvenir jusqu'à l'âge de vingt ans sans avoir eu la petite vérole; d'un autre côté, je ne crois pas que cette maladie enlève ici au-delà de la douzième partie de ceux qu'elle surprend ni au-delà de la vingtième partie du total des morts de tous genres. Si j'avois donc voulu accommoder mes calculs à mon petit pays, j'aurois supposé n , §. 3, (1), plus petit que 8 & m plus grand que 8; §. 3, (2.); mais comme nous n'avons pas ici les observations requises, j'ai préféré de conformer mes calculs aux observations des grandes villes. Je passe à d'autres considérations.

§. II. On s'est donné beaucoup de peine pour évaluer le gain qu'on pourroit espérer de l'Inoculation si elle étoit généralement introduite, & l'avantage de chaque particulier qui se feroit inoculer: on voit bien en général que ce profit & cet avantage ne sauroient manquer d'être fort considérables & infiniment précieux; mais de quelle sorte d'unité doit-on se servir pour mesurer la chose? est-ce par la vie moyenne qu'on peut espérer après l'Inoculation? les années de la vie sont-elles toutes d'un même prix? Quoi qu'il en soit, je dis que la question est indéterminée tant qu'on ne connoît pas l'effet de la petite vérole pour chaque année durant toute la durée d'une génération, & la proportion avec l'effet de toutes les autres maladies. Au défaut de cette connoissance, on a recours à des estimes, le plus souvent trompeuses, & à plusieurs espèces de quantités qu'on appelle *moyennes*, & dont on peut faire facilement une mauvaise application. J'ai donc jugé que le seul parti à prendre, est celui de déterminer sur la même génération de 1300 nouveaux nés, quel seroit au bout de chaque année le nombre de survivans si toute cette génération étoit exempte de la petite vérole, ou, ce qui revient au même, si aucun n'en mouroit. Sur une telle détermination, il suffira de comparer les résultats avec la seconde colonne de notre Table, pour voir d'un coup d'œil le rapport entre les deux espèces de vie: il sera facile ensuite d'aller plus loin & de répondre à plusieurs autres questions très-intéressantes qu'on peut faire sur ce sujet. Voici donc comment on pourra procéder pour former cette nouvelle liste, en se contentant d'examiner la chose d'année en année, ce qu'on est obligé de faire, parce qu'on n'a point de table mortuaire de six mois en six mois, qu'on pourroit employer avec plus d'exactitude. La sixième colonne marque que pendant la première année de vie la petite vérole a emporté 17 enfans; ainsi sans cette maladie il y auroit 1017 au lieu de 1000 (*col. 2*) qui atteindroient l'âge d'un an: ensuite il faut considérer que si pendant la seconde-année il meurt 133 (*col. 8*) sur 1000 qui étoient en vie au commencement de la seconde année,

il en mourra 135,3 sur 1017, & qu'ainsi 881,7 resteront en vie & atteindront la troisième année: en général, on continuera la liste des nombres que nous cherchons, si du dernier nombre cherché on retranche $\frac{p}{q} r$, en prenant pour q successivement les nombres de la seconde colonne de la première Table, pour r ceux de la huitième colonne, & pour p le terme de la nouvelle liste qui précède, puisque le nombre de ceux qui meurent pendant chaque année par toutes les maladies non varioliques, est sans doute proportionnel au nombre de ceux qui vivent à cet âge, quelle que soit la proportion entre ceux qui ont déjà eu la petite vérole & ceux qui ne l'ont pas encore eue. Ainsi nous voyons dans la Table qui suit, qu'il y a 855 qui atteignent la troisième année dans l'état variolique & naturel, & qu'il y en auroit 881,7 dans l'état non variolique: la Table précédente montre aussi que pendant tout le cours de la troisième année toutes les maladies non varioliques enlèvent 47; il faut donc dire, si sur 855 il en meurt 47, combien mourront sur 881,7, & on trouve 48,4, qu'il faut ôter de 881,7 pour avoir le nombre suivant, qui sera par conséquent 833,3. C'est de cette façon que j'ai construit la seconde Table qui se trouve à la fin de ce Mémoire, où les deux premières colonnes sont les mêmes que dans la première Table, quoique j'indique la seconde colonne par un autre nom, savoir, par celui d'*état naturel & variolique*, par antithèse à la troisième colonne, qui marque l'*état non variolique*, ce qui fait proprement le nombre des survivans à chaque année, en supposant qu'aucun ne dût mourir de la petite vérole. J'ajoute une quatrième colonne qui marque les différences entre les deux états.

§. 12. La Table dont je viens de donner l'explication, met tout d'un coup dans un grand jour les problèmes qu'on propose ordinairement pour déterminer le ravage que la petite vérole exercé sur le genre humain, son terrible effet contre la propagation de l'espèce & sa conservation, & le gain que l'humanité feroit si elle pouvoit être exemptée de cette source de destruction. Tant que je me servirai de pareilles expressions, j'espère
ne

ne point irriter ceux qui se déclarent contre l'Inoculation. Voici donc les corollaires que je tire de cette seconde Table & qui me paroissent les plus importans.

(a) *Le gain absolu*, marqué dans la quatrième colonne, croît d'abord sensiblement, mais les accroissemens de ce gain diminuent: le plus grand gain absolu répond à l'âge de vingt jusqu'à vingt-deux ans; à cet âge, le nombre des survivans, pour l'état supposé exempt du fléau de la petite vérole, surpasse le nombre des survivans pour l'état naturel & variolique de 80,3, le total des naissances étant supposé de 1300: à cet âge donc le gain va déjà à près de la seizième partie du nombre des naissances. Après cet âge, les nombres qui expriment le gain diminuent, & il étoit facile de prévoir que cela arriveroit, puisque dans l'extrême vieillesse le nombre des survivans doit être extrêmement petit pour l'un & l'autre état.

(b) La vraie estime du gain doit être formée par le rapport de ce gain au nombre correspondant des survivans pour l'état naturel; on peut en ce sens l'appeler *gain relatif*: à l'âge de cinq ans accomplis, l'état naturel ne fournit que 732 vivans, & l'autre état en fournit 47,8 de plus, ce qui fait environ la quinzième partie. A l'âge de dix ans, il y a pour l'état naturel 661 vivans, & il y en a 67,4 de plus dans l'état non variolique; ce qui fait plus de la dixième partie de ceux qui restent naturellement en vie à l'âge de dix ans accomplis: à l'âge de quinze ans, le gain relatif est de 77 contre 628 vivans, que cet âge donne naturellement; ce rapport de 77 à 628, est à peu près comme 1 à 8; ainsi le gain relatif pour l'âge de quinze ans, est de près d'un huitième.

(c) On voit aussi que le gain relatif doit augmenter jusqu'à la mort du dernier survivant des 1300 enfans supposés nés le même jour, si on suppose qu'on demeure exposé à prendre la petite vérole tant qu'on ne l'a pas eue, puisque sur un grand nombre égal il en mourra toujours plus, toute autre proportion gardée, de ceux qui n'ont pas eu la petite vérole, que de ceux qui l'ont déjà eue: c'est-là aussi ce que notre Table indique; car quoique les gains absolus commencent à diminuer à l'âge

de vingt-deux ans, les gains relatifs ne laissent pas d'augmenter : nous avons vu qu'à l'âge de quinze ans le gain relatif est de près d'un huitième; à l'âge de vingt ans, il est de 80,2 sur 598, & par conséquent de près d'un septième $\frac{1}{2}$: enfin à l'âge de vingt-cinq ans, le gain est de 79,3 sur 565, & cette proportion donne le gain relatif de près d'un septième. On voit donc qu'il augmente continuellement, mais il n'ira jamais au-delà d'un septième; ce qui fait la proportion du nombre de ceux qui meurent de la petite vérole, quand ils en sont atteints, à ceux qui en réchappent. C'est-là un beau théorème que je démontrerai dans la suite, savoir, que la proportion asymptote du gain aux vivans, est généralement comme 1 à $m - 1$, & celle des vivans dans l'état naturel aux vivans dans l'état exempt de la petite vérole, comme $m - 1$ à m ; j'ai donné à m la valeur de 8, parce qu'il m'a paru que cette valeur répondoit le mieux aux phénomènes de la petite vérole: d'autres font $m = 7$, & dans cette supposition le gain devient plus grand, savoir d'un sixième.

(d) Comme la proportion entre les deux états ne change plus sensiblement pour les hommes faits, les seuls utiles à l'État, cette proportion sera à peu-près comme 7 à 8. Si Paris fournissoit chaque année 7 mille personnes âgées de vingt ans, cette capitale en fourniroit 8 mille par année sans la petite vérole: nous voyons aussi par la Table, qu'à l'âge de seize ans la proportion est déjà pour les deux états comme 622 à 700; or c'est cet âge auquel on commence à devenir utile à l'État, tant par les services qu'on peut rendre à la société, que par la propagation du genre humain. On voit donc que la *naissance civile*, sans la destruction de la petite vérole, augmenteroit chaque année, en raison de 622 à 700: on peut appeler naissance civile l'entrée d'une personne dans sa dix-septième année; j'estime cette naissance pour toute la France, de 175 mille par an dans l'état naturel, & je dis qu'elle seroit, sans la mortalité de la petite vérole, de 200 mille; de sorte que la France gagneroit annuellement 25 mille personnes, toutes utiles à l'État & à la société: ce gain ira même beaucoup

plus loin après les premières années écoulées. Le gain absolu à l'âge de seize ans accomplis, est de 78, qui fait à très-peu près la huitième partie de la naissance civile, exprimée dans notre Table par 622.

(e) Dans l'état naturel; du moins celui qui convient, suivant M. Halley, à la ville de Breslaw, toute une génération est diminuée de la moitié à l'âge de onze ans & cinq mois; & dans l'autre état, ce n'est qu'à l'âge de vingt-quatre ans & trois mois que cela arrive: à six ans & demi il n'y a pas plus de vivans dans le premier état qu'il y en a dans le second à l'âge de seize ans: pareillement l'âge de neuf ans d'un côté & celui de vingt-un de l'autre, sont également fertiles dans les deux différens états. Ceux qui voudront continuer notre Table, pourront déduire plusieurs autres corollaires de la même nature, & la continuation de la Table se fera avec une grande facilité, sans aucune erreur sensible; il n'y a qu'à continuer la seconde colonne telle que M. Halley l'a donnée, jusqu'à l'extinction entière de la génération, & multiplier ensuite chaque nombre par $\frac{8}{7}$ pour avoir, après l'âge de 25 ans, les nombres analogues de la troisième colonne.

(f) On peut appeler *quantité de vie totale* de la génération de 1300 pour chacun des deux états, ce qui provient, en prenant la somme de tous les nombres qui composent la seconde colonne, de même que celle de tous les nombres qui composent la troisième colonne, en supposant les deux colonnes continuées jusqu'à l'extinction entière des 1300 nouveaux nés. Cette règle deviendra plus correcte si on ne prend que la moitié du premier nombre, qui est 1300, parce qu'il convient de supposer que ceux qui meurent pendant le cours d'une certaine année, meurent tous au milieu de l'année. Si ensuite on divise la quantité totale de vie par le nombre de tous les nouveaux nés, qui est 1300; on aura la quantité de vie; ou simplement la *vie moyenne* de chaque nouveau né. Suivant cette correction, la somme des nombres de la seconde colonne, y compris l'âge de vingt-cinq ans, devient 17353, & la somme des autres nombres de la seconde colonne, depuis

vingt-cinq ans exclusivement jusqu'à l'âge de quatre-vingt-quatre ans inclusivement, devient $= 17187$, en suivant la Table de M. Halley : à cet âge de quatre-vingt-quatre ans accomplis, il restoit encore 20 vivans, dont la quantité de vie devoit être encore d'environ soixante-cinq ans, de sorte que ladite somme 17187 doit encore être augmentée de 65, ce qui fait en tout 17252 : ainsi la quantité de vie totale dans l'état naturel, vaut $17353 + 17252$, ou bien 34605. Or, divisant ce nombre par 1300, nous aurons la vie moyenne pour chaque nouveau-né, dans l'état naturel, $= 26$ ans & 7 mois : de la même manière on trouve la vie moyenne naturelle, pour les enfans d'un an, de trente-trois ans & cinq mois, & pour ceux de deux ans, de trente-huit ans. Ces deux derniers cas s'accordent fort bien avec la Table de M. de Buffon, qui se trouve à la fin de son excellente Histoire Naturelle, au tome second, quoique cette Table ait été construite sur une toute autre liste mortuaire : mais la première quantité de vie moyenne pour les enfans nouveaux nés, que j'ai trouvée de vingt-six ans & sept ou huit mois, diffère énormément de celle de huit ans, que cet illustre auteur marque. Il faut qu'il y ait une faute d'impression ; peut-être au lieu de huit ans, devoit-il y avoir vingt-six ans & huit mois, ou vingt-huit ans.

Si nous ajoutons de la même manière tous les nombres de la troisième colonne, après avoir diminué de la moitié le premier nombre 1300, cette somme sera maintenant 18990, qui marque la quantité de vie totale, en tant qu'elle seroit exempte de la petite vérole, jusqu'à l'âge de vingt-cinq ans inclusivement ; mais pour trouver le reste de cette vie totale jusqu'à l'extinction entière, je me servirai du nombre 17252, correspondant pour l'état naturel, & je le multiplierai par $\frac{8}{7}$ [Voy. la remarque (c)] : j'aurai donc ce reste $= 19716$, & par conséquent la quantité de vie totale pour l'état non variolique, $= 18990 + 19716 = 38706$. Ainsi les deux quantités de vie totale sont, pour l'un & l'autre état, comme 34605 à 38706 : les deux vies moyennes, pour les

deux états, observent la même proportion ; celle de l'état non variolique est de vingt-neuf ans neuf mois, pendant qu'elle n'est pour l'état naturel, que de vingt-six ans sept mois : le gain est à peu près de $\frac{2}{17}$ de la vie moyenne naturelle.

§. 13. Que l'on compare à présent les deux tableaux que je viens d'exposer, & qui ne sauroient manquer de représenter assez au juste les deux états, & on sera assurément touché du ravage que la petite vérole toute seule fait dans le genre humain. Je laisse à d'autres qui sentent les vérités mathématiques, & qui en même temps savent leur donner toute leur énergie ; je laisse sur-tout à M. de la Condamine, s'il trouve ces remarques dignes de son attention, leur application à l'Inoculation, mais qu'il seroit à souhaiter que les Médecins, au lieu de le traverser dans son zèle également pieux & éclairé, voulussent le seconder en perfectionnant la méthode de l'inoculation, plutôt que de la rejeter, sans avoir peut-être assez pesé l'importance de son objet.

J'ai dit à la remarque (c) du précédent article, que les nombres de la troisième colonne, relativement aux nombres analogues de la seconde colonne, tendent vers la proportion de 8 à 7, ou plus généralement vers la proportion de m à $m - 1$, c'est à-dire du nombre de ceux qui sont atteints de la petite vérole au nombre de ceux qui en échappent. J'avoue que je n'ai d'abord été conduit à cette conclusion que par une simple conjecture : je me suis donc aussitôt appliqué à chercher par le calcul quelle devoit être ladite proportion asymptote. J'exposerai ici ce calcul d'autant plus volontiers, qu'il nous fournira une expression générale pour tous les nombres de la troisième colonne jusqu'à l'extinction entière de la génération ; & cette expression générale auroit pu servir à indiquer les nombres encore plus exactement qu'on ne peut faire par la méthode du §. 11, qui n'est qu'une espèce d'approximation.

Si nous reprenons les lettres x , ξ , s , m & n , dans le sens que je leur ai donné au §. 5, de même que l'équation finale de ce paragraphe, & qu'outre cela nous entendions par z

les nombres de la troisième colonne, il s'agira de trouver le rapport de z à ξ : or la mortalité entière pendant l'élément de temps dx étant $-d\xi$, & la mortalité de la petite vérole

$\equiv \frac{s dx}{mn}$, on aura la mortalité entière pour l'état non variolique $\equiv -d\xi - \frac{s dx}{mn}$, mais cette mortalité répond

au nombre ξ ; il faut donc la multiplier par $\frac{z}{\xi}$ pour la faire

répondre au nombre z , par-là nous aurons $\frac{z}{\xi}$

$(d\xi + \frac{s dx}{mn}) \equiv -dz$, où bien $\frac{dz}{z} \equiv \frac{d\xi}{\xi}$

$\equiv \frac{s dx}{mn\xi}$. Substituons pour s la valeur exposée au commen-

cement du §. 6, & nous aurons $\frac{dz}{z} \equiv \frac{dx}{\xi}$

$\equiv \frac{\frac{1}{n} dx}{(m-1)e^{\frac{x}{n}} + 1}$; l'intégrale de cette dernière équation

se trouve par les règles connues,

$$\frac{z}{\xi} \equiv \frac{m e^{\frac{x}{n}}}{(m-1)e^{\frac{x}{n}} + 1}$$

Cette expression donne généralement tous les termes de la troisième colonne, sans qu'on soit obligé de passer par les précédens, en faisant $m \equiv 8$ & $n \equiv 8$, & elle les donne plus exactement, sans cependant qu'ils diffèrent sensiblement de ceux que la Table indique, sur-tout vers la fin; elle nous fait voir d'un coup d'œil la nature des variations, & sur-tout qu'en prenant pour x , qui marque l'âge, un nombre un peu grand, le rapport de z à ξ doit être extrêmement près de celui de m à $m - 1$, ou de 8 à 7; pour notre hypothèse, sans cependant jamais l'atteindre exactement; mais voyons aussi, par un ou deux exemples, jusqu'où notre expression générale conspire avec les nombres de la troisième colonne, que nous n'avons trouvé que par une approximation,

en passant successivement d'une année à l'autre. Soit, par exemple $x = 16$, & nous aurons $z = 697,4$, & la Table indique $700,1$; soit ensuite $x = 24$, & l'équation donnera $z = 649,2$; pendant que la Table donne $z = 651,7$. Par ces deux exemples; nous voyons que notre équation donne à peu-près les mêmes nombres que la Table: si cependant la petite différence qu'il y a pouvoit faire de la peine dans une matière de cette nature, il faudroit corriger les nombres de la troisième colonne & les rendre tels que notre équation les marquera.

§. 14. Tâchons, pour le bien de l'humanité, d'expliquer & de déterminer encore plus exactement les motifs qui doivent nous décider pour ou contre l'Inoculation: si l'Inoculation nous procuroit tous les avantages que j'ai démontré accompagner l'état de l'exemption de la petite vérole, & si elle les procuroit sans aucun risque & sans aucun inconvénient, faudroit-il douter ou hésiter sur le parti à prendre? ne faudroit-il pas inoculer les enfans dès les premiers jours de leur naissance? il me semble que ce seroit être dénaturé que d'oser soutenir qu'il ne faudroit pas même le faire en ce cas-là. Il n'y a donc plus que le risque qu'on attribue à l'Inoculation qui doive nous tenir en suspens: cette réflexion m'engage à proposer & à examiner cette nouvelle question: *Quel seroit l'état de l'humanité, si moyennant un certain nombre de victimes on pouvoit lui procurer une exemption de la petite vérole naturelle?* Ce problème paroît d'abord bien difficile, cependant il découle fort naturellement de nos principes & de notre manière de traiter ce sujet.

Supposons donc que pour être du nombre des privilégiés il en coûte 1 sur N ; il n'y aura qu'à considérer que toute la génération est diminuée en raison de N à $N - 1$, & par conséquent qu'à diminuer tous les nombres de la troisième colonne en la même raison. De cette manière, la somme de tous ces nombres qui indique la quantité de vie totale, sera pareillement diminuée en raison de N à $N - 1$: il est donc très-facile de construire une nouvelle Table qui marque

l'état de l'humanité; tel qu'il seroit si moyennant un certain petit tribut, tout le reste des enfans nouveaux nés étoient absolument exempts de tout danger de la petite vérole. Je n'ajoute pas une telle Table, parce qu'on ne convient pas assez du nombre N , qui dans le système de l'Inoculation marque combien de fois le nombre de tous les Inoculés est plus grand que le nombre de ceux qui meurent par la petite vérole artificielle; on convient seulement que depuis qu'on a perfectionné ledit système, le nombre N est extrêmement grand: il est vrai qu'il pourroit être plus petit à l'égard des enfans qu'on voudroit inoculer dès le berceau: cependant cette augmentation de danger n'a pas encore été constatée, & il n'est pas sûr que le danger n'en soit que plus petit; en tout cas je pense prendre la chose au pire, en supposant, par exemple, $N = 200;0$. C'est pour cet exemple que je vais ajouter ici quelques remarques.

La naissance de 1300 sera en ce cas d'abord réduite à 1293,5, & les survivans à l'âge d'un, deux & trois ans accomplis, seront successivement 1012,1; 877,4; 831,2, & ainsi de suite; après quoi les différences de ces nombres & de ceux de la seconde colonne marqueront les gains pour tous les âges, toute déduction faite pour le danger de l'Inoculation de la petite vérole: ces gains seront donc successivement 12,1; 22,4; 33,2; &c. Par ces exemples, on voit déjà que cette déduction va à très-peu de chose & qu'on pourroit la négliger pour la totalité, qui seule mérite l'attention du Prince quand il s'agit du bien de l'État ou du bien public: mais voyons quelle sera la quantité de vie totale, si nous faisons la déduction que nous venons d'expliquer. Nous avons vu dans la remarque (f) du §. 12, que la quantité de vie totale pour l'état naturel, est $= 34605$; & celle pour l'état non variolique, si nous ne faisons aucune déduction, $= 38706$: ce dernier nombre maintenant doit être diminué de sa deux centième partie, à cause du danger qui accompagne l'Inoculation. Par cette déduction nous obtenons la quantité de vie totale, pour l'état non variolique & tout tribut

tribut payé = 38513, nombre qu'il faut comparer avec 34605, qui exprime l'état naturel. Si nous divisons ces nombres par 1300, nous aurons la vie moyenne pour l'état naturel, de vingt-six ans sept mois; pour l'état non variolique, exempt de tout tribut, de vingt-neuf ans neuf mois, & pour l'état non variolique, tout tribut payé, de plus de vingt-neuf ans sept mois. Le danger de l'Inoculation ne diminue la vie moyenne que d'environ un mois vingt jours; & notwithstanding ce danger, le gain est encore de trois ans sur vingt-six ans sept mois, qui est la vie moyenne pour l'état naturel: ce gain va encore au-delà de la neuvième partie de la vie naturelle, & auparavant il en faisoit à peu-près les $\frac{2}{17}$.^{me}

Examinons encore cette autre question, quel nombre il faudroit prendre pour N , pour que l'Inoculation ne fît sur la totalité ni bien ni mal, & que la vie moyenne demeurât la même qu'elle est dans l'état naturel? on résoudra cette

question, en faisant $\frac{38706}{34605} = \frac{N}{N-1}$; & cette équation

donne à peu-près $N = 943$. On doit donc considérer comme une vérité morale, que tant que l'Inoculation, administrée sur les enfans nouveaux nés, enlève moins que 100 sur 943, elle fait plus de bien que de mal: c'est sur ce théorème qu'on doit se régler, soit pour rejeter, soit pour introduire l'Inoculation à l'égard des enfans nouveaux nés, tant qu'on veut adopter le principe de la plus grande utilité de toute l'humanité. Au lieu de la proportion de 100 à 943, on auroit pu s'attendre à celle de 1 à 8; la différence provient de ce que ceux qui meurent de la petite vérole naturelle, n'en meurent point dès leur naissance.

Je vais plus loin, & je ne crains pas de dire, que quand même on supposeroit à l'Inoculation un si énorme péril que d'enlever 100 sur 943, il en résulteroit encore un bien pour la société. Pour comprendre ce paradoxe, il faut examiner le changement qui arriveroit en ce cas: la naissance de 1300 enfans seroit d'abord réduite à 1162, & puis à 909 à l'âge d'un an; à 788 à l'âge de deux ans, &c. de cette manière, les

années sont moins fertiles que dans l'état naturel, mais la différence devient continuellement plus petite: à l'âge de quinze ans elle est nulle; l'état naturel porte 628, & on auroit 630 pour le cas de l'Inoculation générale, quelque meurtrière que nous l'ayons supposée; ensuite de quoi l'état naturel seroit toujours moins fertile que l'autre, tellement qu'à l'âge de vingt-cinq ans, auquel il y a 565 vivans, selon l'état naturel, nous aurions 576 dans l'autre état. De-là nous voyons que la perte ne tomberoit que sur les enfans inutiles à la société, & que tout le gain rejailliroit sur cet âge, qui est le plus précieux. Si une génération de 1000 enfans avoit vingt mille ans devant elle à partager, vaudroit-il mieux pour l'État qu'ils arrivassent tous jusqu'à l'âge de vingt ans & qu'ils mourussent tous à cet âge, ou bien que 500 mourussent au berceau, & que 500 arrivassent à l'âge de quarante ans? si tel étoit le sort de l'humanité, elle seroit bien-tôt éteinte au premier cas & surabonderoit peut-être dans le second. Enfin, de quelque manière que l'on envisage notre sujet, il sera toujours géométriquement vrai que l'intérêt des Princes est de favoriser & de protéger l'Inoculation avec toutes les attentions possibles, & d'un père de famille à l'égard de ses enfans; les personnes même parvenues à l'âge de raison & qui n'auroient pas encore eu la petite vérole naturelle, pourroient se trouver dans des circonstances particulières qui demanderoient des calculs particuliers, pour leur apprendre le parti le plus avantageux qu'ils auroient à prendre sur l'âge le plus convenable pour l'Inoculation; mais l'intérêt public demandera toujours, non-seulement que l'on emploie l'Inoculation, mais encore qu'on se hâte de l'employer, afin de prévenir la petite vérole naturelle, puisque nous voyons par notre première Table, qu'à l'âge de quatre ans & demi elle aura déjà enlevé la moitié de tous ceux qui doivent probablement en mourir, & qu'il ne reste plus que 450 personnes qui ne l'ont pas encore eue, & qui se trouvent dans le cas d'appeler l'insertion à leur secours: si cependant une longue expérience donnoit à connoître qu'à la première année de vie les enfans fussent beaucoup

moins exposés à prendre la petite vérole que les années suivantes, ce seroit un motif de différer l'Inoculation jusqu'à l'âge d'un an accompli : il faut consulter là-dessus les Médecins, puisque les listes mortuaires ne marquent pas l'âge de ceux que la petite vérole a enlevés. Appliquons-nous à connoître la nature de la petite vérole par les phénomènes, & n'écoutons point les hypothèses pour former là-dessus des pathologies & pour en déduire des conclusions. Les hypothèses que j'ai faites moi-même ne concernent pas la nature essentielle de la maladie; elles ne consistent qu'à supposer quelques proportions comme suffisamment déterminées par un grand nombre d'observations: quoique ces proportions puissent bien être susceptibles de quelque petite correction, qui dépendra de nouvelles listes mortuaires relatives à la petite vérole, & qui marqueront surtout l'âge auquel les personnes seront mortes de cette maladie, cependant j'ose assurer que ces corrections mêmes n'apportent pas de changement fort considérable dans nos résultats. C'est encore à l'expérience à décider si l'Inoculation est plus dangereuse pendant la première année de vie que pendant la cinquième ou la sixième; je ne crois pas du moins qu'il soit encore bien constaté que la petite vérole naturelle le soit.

§. 15. Notre méthode sert encore à éclaircir une objection que quelques Médecins se sont avisés de faire contre l'Inoculation: elle consiste dans la contagion qu'on répand d'une maladie qui auroit pu demeurer dans l'inaction pendant plusieurs années de suite; ils poussent cette objection jusqu'à dire qu'un seul inoculé pourra donner la petite vérole à dix autres, chacun de ces dix encore à dix, & forment ainsi une progression géométrique, dont le seul douzième terme surpasse de beaucoup le nombre de tous les hommes qui ont existé depuis la création du monde. On pourroit d'abord répondre à cela que peut-être l'humanité s'en trouveroit mieux si la maladie en question devenoit endémique & qu'elle exerçât son activité uniformément sans la suspendre: peut-être que le retour d'une épidémie long-temps suspendue, fait un ravage plus terrible dans une seule année qu'une endémie uniforme

ne pourroit faire pendant un nombre d'années considérable. Je m'en rapporte là-dessus à la décision des Médecins. Voici le fait tel qu'il faut le considérer: je ne propose de comparer ensemble les deux infections; l'une en laissant le cours à la Nature, & l'autre en supposant l'Inoculation généralement employée sur tous les enfans nouveaux nés. Dans le premier cas, il y aura sur la naissance de 1300 enfans 800 qui prendront, tôt ou tard, la petite vérole, & 500 mourront sans avoir jamais eu la maladie; *Voy. la remarque (i) du §. 9*: dans le second cas, il y aura 1300 enfans auxquels on donnera la petite vérole artificielle, en supposant même qu'on fasse l'opération à tous sans aucune exception & qu'elle fasse son effet attendu sur tous: donc les deux nombres de malades seront comme 800 à 1300; voilà le résultat qu'il faut substituer à la terrible progression géométrique: ainsi le rapport entre les deux infections sera jusqu'ici comme 8 à 13, mais certainement l'infection des inoculés est beaucoup plus petite que celle de la petite vérole naturelle, parce qu'elle est incomparablement moins maligne dans les inoculés; peut-être ne dira-t-on rien de trop, en la faisant treize fois moins maligne: en ce cas il faudroit changer le rapport de 8 à 13 en celui de 8 à 1. A cela j'ai une autre réflexion à ajouter, c'est que pour un même degré de malignité, il est raisonnable de considérer le degré de l'infection proportionnel à la surface du corps malade; & cette surface moyenne sera à peu près quatre fois plus grande pour la petite vérole naturelle qu'elle n'est pour les enfans nouveaux nés qu'on inoculeroit tous: de cette manière on est fondé à dire que l'infection générale de la petite vérole naturelle est trente-deux fois plus grande qu'elle ne seroit si on faisoit l'inoculation à tous les enfans nouveaux nés. Je n'insisterai pas sur les proportions; que je n'ai alléguées que pour rendre plus lumineuses les raisons que je viens d'exposer, & je laisse tout le monde le maître de changer ces proportions comme il le trouvera convenable: je souhaite seulement que dans une question qui regarde de si près le bien de l'humanité, on ne décide rien qu'avec toute la

connoissance de cause qu'un peu d'analyse & de calcul peut fournir.

§. 16. J'ai examiné jusqu'ici les terribles effets & les tristes suites de la petite vérole pendant tout le cours de la vie humaine, & sur-tout pendant les premiers vingt-quatre ans de vie, pendant lesquels nos hypothèses ne sauroient s'écarter sensiblement de l'état de la Nature, & après lesquels cette maladie ne fait plus d'effet sensible sur la totalité. On ne sauroit trop encourager ceux qui se proposent de recourir à l'Inoculation pour prévenir ces terribles maux, de se hâter de le faire, de peur qu'on ne soit prévenu par la petite vérole naturelle, & il importe sur-tout à l'État d'établir cette maxime, puisqu'on voit, par la septième colonne de la première Table, qu'à l'âge de cinq ans la petite vérole a déjà enlevé au-delà de la moitié du total de ses victimes, & les trois quarts à l'âge de neuf ans accomplis. Il se pourroit fort bien que l'âge le plus propre à l'Inoculation, fût précisément celui qu'on croit avoir plus de raison de ménager, savoir la première enfance, du moins l'expérience n'a-t-elle pas encore enseigné le contraire; à ce que je sache: il me semble qu'on pourroit suivre la maxime d'inoculer les enfans qui sortent de nourrice, sur-tout si leurs père & mère, de même que la nourrice lorsqu'ils n'auront pas été allaités par la mère, sont bien sains, chacun pour la part qu'il peut avoir à la constitution de l'enfant; si alors l'enfant ne donne aucun signe de mauvaise santé & qu'il ne règne aucune épidémie maligne de petite vérole, il est à présumer, plus que dans tout autre temps, qu'un tel enfant nourri jusque-là dans le sein de la Nature, n'a rien contracté qui doive empêcher l'inoculation.

§. 17. J'ai tourné souvent mes réflexions du côté de la politique: je remarquerai encore à cet égard que l'intérêt de l'État n'y entreroit presque pour rien si on vouloit rejeter généralement l'Inoculation après l'âge de vingt ans; mais une personne arrivée à cet âge de raison & qui n'auroit pas encore eu la petite vérole, n'en est pas moins intéressée à recourir à l'Inoculation, il n'y a que la petitesse du nombre de ces

personnes qui pût rendre leur inoculation presque indifférente à la société; mais celui qui se trouve par hasard compris dans ce petit nombre, en retire à peu-près le même fruit qu'un enfant qui auroit subi cette opération à l'âge de quatre ou cinq ans. Tout homme qui n'a pas eu la petite vérole se trouve dans l'accablante nécessité de jouer pendant chaque année de sa vie avec 63 autres, lequel doit mourir de cette maladie, & avec 7 autres, lequel doit la prendre, & il traîne avec lui ce triste sort jusqu'à ce qu'il prenne la maladie. Ne vaut-il pas mieux, en supposant que l'inoculation enlève 1 sur 473; de jouer contre 472 au lieu de 63, & de n'être tenu qu'à subir le sort une seule fois, au lieu d'y retourner chaque année de sa vie? un homme avisé peut-il hésiter sur le choix? cependant cette alternative est exactement celle d'attendre la petite vérole naturelle ou de se faire inoculer. D'où peut donc venir que plusieurs personnes hésitent encore? la réponse est bien simple, c'est que toutes ces choses ne tombent pas sous les sens. Si quelque Tyran idolâtre choissoit annuellement de cette manière ses victimes, pour être immolées avec beaucoup d'appareil à son idole, & qu'on pût s'affranchir de ce terrible arrêt en se soumettant *une fois pour toutes* à un danger en soi-même près de huit fois plus petit que celui auquel on est obligé de s'exposer de nouveau chaque année, pourroit-il y avoir un seul homme qui hésitât sur le parti à prendre? quelque clameur qu'on fit, tous suivroient le chemin de l'exemption, quoique ce chemin ne soit pas lui-même absolument libre de tout danger.

§. 18. Au reste, quoiqu'il soit vrai de dire, comme j'ai fait, que l'avantage de l'inoculation est à peu-près le même pour tout âge, on voit facilement qu'il doit y avoir quelque inégalité par rapport aux différens âges; puisque cet avantage dépend toujours du mélange variable qu'il y a entre la mortalité de la petite vérole & la mortalité entière de toutes les maladies & accidens, la seule qui soit déterminée par les listes mortuaires. On ne sauroit donc déterminer le prix des inoculations sans suivre notre méthode, qui a été de démêler la

mortalité de la petite vérole d'avec toutes les autres mortalités pendant tout le cours de la vie humaine. C'est ici un nouveau sujet qui m'a toujours paru le plus difficile à traiter avec exactitude, tant que j'ai voulu éviter d'entrer dans tout le détail que j'ai exposé jusqu'ici. Je me propose donc maintenant d'examiner le prix de l'Inoculation faite à un âge quelconque; question qu'on ne sauroit résoudre sans savoir tous les phénomènes de la petite vérole depuis le commencement d'une génération jusqu'à son entière extinction, non plus que les autres questions que nous avons déjà résolues à l'égard de l'Inoculation de la première enfance. J'éclaircirai ma méthode par un exemple, & je choisirai celui de l'âge de cinq ans accomplis, & je me propose de chercher sa vie moyenne, s'il attend tranquillement la petite vérole naturelle: ensuite je chercherai pareillement sa vie moyenne, en le supposant entièrement exempt de la même maladie, & c'est par le rapport de ces deux vies moyennes que je jugerai du prix de l'Inoculation, ainsi que je l'ai fait au §. 12, *remarque (f)*, où j'ai démontré que les deux vies moyennes pour les deux états, sont, dans les enfans nouveaux nés, comme 34605 à 38706, ou à peu-près comme 17 à 19. Ceux qui auront lû avec attention cette remarque, auront d'autant moins de peine à suivre les calculs numériques que je vais indiquer: j'emploierai encore la correction de ne prendre que la moitié du premier terme ou de retrancher la moitié du premier terme de la somme de tous les termes, depuis l'âge de cinq ans, dans la seconde & la troisième colonne de la seconde Table.

§. 19. La seconde Table nous apprend que de 1300 enfans nouveaux nés, il y en aura 732 qui atteindront l'âge de cinq ans accomplis, desquels 416 n'auront pas eu la petite vérole & 316 auront déjà eu cette maladie, en vertu de la première Table. Qu'on cherche *la quantité de vie totale* de tous ces 732 enfans, sans y comprendre les cinq premières années, nous avons trouvé au §. 12, *remarque (f)*, cette quantité de vie totale, à la prendre depuis la naissance = 34605, & il en faut retrancher la quantité de vie depuis la naissance jusqu'à l'âge

de cinq ans accomplis, en ôtant la moitié du premier terme qui est 1300, & en ajoutant la moitié du terme 732; la somme des cinq premiers termes est 4713: on a donc pour la quantité de vie, depuis la naissance jusqu'à l'âge de cinq ans accomplis, $4713 - \frac{1300}{2} + \frac{732}{2}$, ou bien 4429, qu'il faut soustraire de 34605 pour avoir la quantité de vie totale depuis l'âge de cinq ans pour 732 enfans pris de l'état naturel; cette quantité fera donc = 30176. Je remarquerai ici en passant, que si on partage également cette quantité de vie totale sur les 732 enfans parvenus à l'âge de cinq ans accomplis, on trouve $41\frac{1}{4}$, qui fait par conséquent leur vie moyenne, & la Table inférée au second volume de l'Histoire Naturelle de M. de Buffon, marque $41\frac{1}{2}$ ans; accord admirable, vu la diversité des circonstances. Après cela, il faut pareillement chercher la quantité de vie totale depuis l'âge de cinq ans accomplis pour l'état non variolique, en supposant, en conformité de la troisième colonne de la seconde Table, 779,8 de ces enfans parvenus à l'âge de cinq ans, & nous avons trouvé, au §. 12, *remarque (f)*, cette quantité de vie totale depuis la naissance = 38706, desquels il faut retrancher, à cause des cinq premières années, 4574, après quoi il restera 34132.

Faisons maintenant attention, qu'en vertu de la première Table il y a parmi les 732 enfans, qui composent l'âge de cinq ans pour l'état naturel, 316 qui auront déjà eu la petite vérole, & qui par conséquent ont déjà été transportés dans l'état non variolique, & qu'il faut calculer à part la quantité de vie totale de ces 316 enfans par cette analogie: si 779,8 enfans ont pour quantité de vie totale 34132, quelle sera cette quantité pour 316 enfans? & on trouvera 13832. Si donc les 316 enfans, qui ont déjà eu la petite vérole, ont 13832 de vie totale, & que les 732 ont 30176 de vie totale, il faut que les 416 qui n'ont pas encore eu la petite vérole aient pour vie totale $30176 - 13832$, ou bien 16344: en divisant ce dernier nombre par 416, nous aurons la vie moyenne d'un enfant âgé de cinq ans accomplis, & qui n'a pas encore

eu

eu la petite vérole = $39 \frac{120}{416}$ ans, ou 39 ans & $3 \frac{1}{2}$ mois; mais nous avons trouvé plus haut que 779,8 enfans de cinq ans, pour l'état non variolique, ont pour vie totale 34132, ce qui donne la vie moyenne d'un tel enfant = $\frac{34132}{779.8}$ = $43 \frac{6006}{7798}$: donc la vie moyenne des enfans de cinq ans, qui n'ont pas encore eu la petite vérole, est à la vie moyenne des enfans du même âge qui ont déjà eu cette maladie ou qui en sont exempts, comme $39 \frac{120}{416}$ à $43 \frac{6006}{7798}$, ou comme 39288 à 43770, ou comme 1000 à 1111; mais nous avons trouvé ci-dessus, à l'égard des enfans nouveaux nés, que cette proportion étoit comme 34605 à 38706, ou comme 1000 à 1117. Il y a donc à fort peu près la même proportion; on peut seulement dire que l'augmentation *relative* est tant soit peu plus grande pour les enfans nouveaux nés que pour les enfans de cinq ans: cependant l'avantage ou l'augmentation *absolue*, est un peu plus grande pour ceux-ci que pour les autres, parce que la vie moyenne naturelle est plus grande pour les enfans de cinq ans que pour les nouveaux nés. L'augmentation absolue est à peu-près de quatre ans & demi pour les enfans de cinq ans, & elle n'est que de trois ans & un mois pour les enfans nouveaux nés. Cette grande différence provient de la grande mortalité de la première année, qui change beaucoup la vie moyenne: dans les autres âges, les augmentations absolues ne diffèrent pas tant; elle sera la plus grande depuis l'âge de six à celui de sept ans, après quoi elle rediminue, mais les augmentations relatives restent à peu-près les mêmes. On remarquera encore, à l'égard des enfans de cinq ans, que la vie moyenne de ceux qui n'ont pas encore eu la petite vérole, la vie moyenne de ceux qu'on prend au fort, & enfin la vie moyenne de ceux qui ont déjà eu la petite vérole, sont en raison des nombres 3929, 4122 & 4377, & que chacun de ces nombres marque, par des centièmes parties d'années, la durée absolue de ces vies moyennes: ainsi le gain absolu qu'on fait lorsqu'agé de cinq ans on est transféré de la classe de ceux qui n'ont pas encore eu la petite vérole dans celle de ceux qui l'ont déjà eue, est de 448, ou de $4 \frac{1}{2}$ ans.

Mém. 1760.

F

On pourra, par la même méthode, évaluer toutes ces choses à l'égard de tout autre âge.

§. 20 Supposé encore qu'on ne puisse faire ce gain sans quelque risque, il sera facile de trouver la diminution de ce gain qui résulte de ce risque. Soit généralement la vie moyenne de ceux qui n'ont pas encore eu la petite vérole $= A$, & la vie moyenne de ceux du même âge qui l'ont déjà eue $= A + a$, & supposons que pour faire ce gain il en coûte la vie à 1 sur n , alors il faudra employer la règle fondamentale des probabilités, & dire: il y a un cas pour succomber & pour perdre la vie, dont la valeur est A , & il y a $n - 1$ cas pour gagner a , & par-là on trouvera le gain qui reste $= \frac{(n - 1) a - A}{n}$. Cette formule nous apprend que si on vouloit faire $n = \frac{A}{a} + 1$, il n'y auroit plus aucun profit à se promettre de l'Inoculation; mais si n est supposé un grand nombre, le risque ne diminue pas sensiblement l'avantage de l'Inoculation.

Si donc on suppose pour les enfans de cinq ans $A = 39,29$ & $a = 4,48$ ans, & qu'on fasse $n = 473$, on trouve le gain qui reste $= 4,39$, & sans ce risque il eût été $= 4,48$; la différence est de 0,09 ou de $\frac{9}{100}$ d'an, ou d'environ un mois, & ainsi le gain de quatre ans & six mois sera changé, à cause du risque, en quatre ans cinq mois, & il faudroit qu'il mourût de l'Inoculation 100 sur 997, c'est-à-dire plus de 1 sur 10, pour qu'elle fît autant de mal que de bien, c'est-à-dire pour qu'il n'en résultât aucun profit pour l'âge de cinq ans.

Je n'ai pas fait mention de la seconde petite vérole, ce cas me paroissant si rare, qu'il ne doit pas en être tenu compte. Une telle considération n'influerait peut-être pas pour la valeur d'un jour sur les vies moyennes que j'ai déterminées: on peut accorder, sans rien déroger au prix de l'Inoculation, qu'elle ne préserve pas plus de la seconde petite vérole, qu'elle préserve de la pleurésie, pourvu qu'on ne prétende pas qu'une seconde petite

vérole soit plus fréquente après l'artificielle qu'elle ne l'est après la naturelle; ce qu'on n'est assurément pas fondé à dire. Après tout, mon intention dans ce Mémoire n'a pas été de défendre ou de préconiser l'Inoculation, je me contenterai à cet égard de me ranger, sans vouloir être remarqué, du côté de ceux qui la croient fort utile: j'ai seulement tâché d'éclaircir sur l'Histoire naturelle de l'Homme, en tant que sujet au fléau de la petite vérole, les questions principales & les plus intéressantes, & de répandre par-là quelque nouvelle lumière sur la question de l'Inoculation, question toujours extrêmement importante pour le bien de l'humanité & devenue si fameuse depuis quelque temps. Une aussi grande question ne doit être jugée qu'avec toute la connoissance de cause possible.

§. 21. Voici encore une question qui peut intéresser la théorie de l'Inoculation: Supposé qu'on prit pour maxime invariable d'inoculer à l'âge de 5 ans complets tous les enfans que la petite vérole naturelle auroit épargnés jusqu'à cet âge, & que l'Inoculation fût toujours efficace, dans quel rapport le nombre total des malades de la petite vérole en seroit-il augmenté? J'ai déjà traité au §. 15 cette question pour le cas qu'on voulût inoculer tous les nouveaux nés; la substitution de l'âge de 5 ans la rend plus naturelle: voici la solution que nos principes fournissent. La cinquième colonne de notre première Table nous apprend que sur une génération de 1300 enfans, il y en aura 436 qui auront eu la petite vérole avant l'âge complet de 5 ans; & la troisième colonne marque qu'il reste à cet âge 416, que cette maladie aura épargnés, & qui alors doivent la prendre par inoculation: de cette façon, le nombre de tous les malades de la petite vérole sera 852, pendant qu'il est de 800 dans l'état naturel: l'augmentation n'est donc plus que de 52 contre 800, ou à peu-près de 1 sur 16; sans doute qu'une telle petite augmentation sur le nombre des malades est, à l'égard de leur infection, compensée au centuple, par la bénignité de la maladie des inoculés, & que, pour le total, l'humanité gagneroit beaucoup du côté de l'infection.

TABLE I.

AGES par années.	Survivans felon M. Halley.	N'ayant pas eu la pet. vérole.	Ayant eu la pet. vérol.	Prenant la pet. vérole pendant ch. année.	MORTS de la pet. vérole pendant chaq. ann.	SOMME des morts de la pet. vérole.	MORTS par d'autres maladies pend. chaq. année.
0	1300	1300	0				
1	1000	896	104	137	17,1	17,1	283
2	855	685	170	99	12,4	29,5	133
3	798	571	227	78	9,7	39,2	47
4	760	485	275	66	8,3	47,5	30
5	732	416	316	56	7,0	54,5	21
6	710	359	351	48	6,0	60,5	16
7	692	311	381	42	5,2	65,7	12,8
8	680	272	408	36	4,5	70,2	7,5
9	670	237	433	32	4,0	74,2	6
10	661	208	453	28	3,5	77,7	5,5
11	653	182	471	24,4	3,0	80,7	5
12	646	160	486	21,4	2,7	83,4	4,3
13	640	140	500	18,7	2,3	85,7	3,7
14	634	123	511	16,6	2,1	87,8	3,9
15	628	108	520	14,4	1,8	89,6	4,2
16	622	94	528	12,6	1,6	91,2	4,4
17	616	83	533	11,0	1,4	92,6	4,6
18	610	72	538	9,7	1,2	93,8	4,8
19	604	63	541	8,4	1,0	94,8	5
20	598	56	542	7,4	0,9	95,7	5,1
21	592	48,5	543	6,5	0,8	96,5	5,2
22	586	42,5	543	5,6	0,7	97,2	5,3
23	579	37	542	5,0	0,6	97,8	6,4
24	572	32,4	540	4,4	0,5	98,3	6,5

TABLE II.

AGES par années.	État naturel & variolique.	ÉTAT non-varioliq.	Différ. ou gains.	AGES par années.	État naturel & variolique.	ÉTAT non-varioliq.	Différ. ou gains.
0	1300	1300	0	13	640	741,1	74,1
1	1000	1017,1	17,1	14	634	709,7	75,7
2	855	881,8	26,8	15	628	705,0	77,0
3	798	833,3	35,3	16	622	700,1	78,1
4	760	802,0	42,0	17	616	695,0	79,0
5	732	779,8	47,8	18	610	689,6	79,6
6	710	762,8	52,8	19	604	684,0	80,0
7	692	749,1	57,2	20	598	678,2	80,2
8	680	740,9	60,9	21	592	672,3	80,3
9	670	734,4	64,4	22	586	666,3	80,3
10	661	728,4	67,4	23	579	659,0	80,0
11	653	722,9	69,9	24	572	651,7	79,7
12	646	718,2	72,2	25	565	644,3	79,3

Cette Table fait voir d'un coup d'œil, combien sur 1300 enfans, supposés nés en même temps, il en resteroit de vivans d'année en année jusqu'à l'âge de vingt-cinq ans, en les supposant tous sujets à la petite vérole; & combien il en resteroit s'ils étoient tous exempts de cette maladie, avec la comparaison & la différence des deux états.

